

СИМВОЛИЧЕСКАЯ И НЕСИМВОЛИЧЕСКАЯ РЕПРЕЗЕНТАЦИЯ КОЛИЧЕСТВА: СПЕЦИФИКА СООТНОШЕНИЯ И СВЯЗЬ С УСПЕШНОСТЬЮ В МАТЕМАТИКЕ

Т.Н. ТИХОМИРОВА*, С.Б. МАЛЫХ

ФГБНУ «Психологический институт РАО», Москва

Приведены результаты исследования взаимосвязи точности оценки количеств, выраженных в символической и несимволической форме, с успешностью выполнения заданий по математике, в том числе в формате государственных экзаменов, на разных этапах школьного обучения. В исследовании с участием 493 школьников 4, 9 и 11 классов показана специфика соотношения точности символической и несимволической репрезентации количества на начальном, основном и полном уровнях общего образования. Делается вывод о зависимости связи точности символической и несимволической репрезентации количества с успешностью выполнения государственных экзаменов от уровня школьного обучения и, соответственно, вида экзаменационной или проверочной работы.

Ключевые слова: символическая репрезентация числа, несимволическая репрезентация числа, стандартизированные математические задания, государственный экзамен, проверочная работа, начальный, основной и полный уровни школьного обучения.

DOI: 10.24412/2073-0861-2021-3-6-23

Введение

Способность к точности в восприятии количественной информации является эволюционно важным психологическим признаком, связанным, в том числе, с индивидуальными достижениями в сфере наукоемких производств, математики и инженерных отраслей [31]. В исследованиях зафиксирован широкий спектр индивидуальных различий в точности оценки количественной информации, связанных с различными форматами предъявляемой информации, и, что важно, *со спецификой соотношения между ними в различные периоды жизни человека* [13, 27].

Репрезентация количества является *гетерогенным конструктом и характеризуется* разнообразием аспектов, связанных,

прежде всего, с представлением количеств в символической и несимволической системах [7, 18, 26]. Точность символической репрезентации количества связана с понятием числа и арифметическими операциями, отношениями между числами, пониманием числового ряда. Точность несимволической репрезентации выражается в понимании, оценке и оперировании множествами объектов, площадей, длин, не требующих числового выражения.

Точность символической и несимволической репрезентации количества измеряется с помощью тестов, где участнику исследования предъявляется стимульный материал соответственно в виде чисел или множеств объектов, различающихся по цвету, форме и расположению объектов. Среди инструментов измерения точности символической репрезентации количества наиболее надежным является тест «Числовая линия», где требуется указать позицию определенного числа на числовой линии «0–1000» или «0–100» [1, 19]. Индивидуальные различия в точности символической репрезентации количества связаны со сте-

© Тихомирова Т.Н., Малых С.Б., 2021

* Для корреспонденции:

Тихомирова Татьяна Николаевна
доктор психол. наук, член-корр. РАО, ПИ РАО
E-mail: tikho@mail.ru

пенью отклонения указанной участником исследования позиции числа на линии от действительной позиции этого числа [4]. Точность несимволической репрезентации измеряется тестом «Чувство числа», задания которого содержат массивы синих и желтых точек, различающихся по диаметру и месту расположения [4, 12]. Участнику исследования необходимо решить, каких точек больше – синих или желтых – в каждом массиве. Индивидуальные различия в точности несимволической репрезентации ассоциируются с общим количеством правильных решений [4].

В исследованиях сообщается о возрастных особенностях и различиях в траектории развития точности символической и несимволической репрезентации количества на протяжении школьного обучения [14, 27]. Показано, что способность к оценке несимволически выраженных количеств в меньшей степени подвержена влиянию социальных процессов, а индивидуальные различия проявляются уже в младенчестве [15] и даже у животных [16], что свидетельствует о важности обработки множеств, выраженных в несимволической форме, в ходе эволюции. В то же время представление информации о количестве в виде символов усваивается и развивается лишь в процессе взаимодействия с социальным окружением и, особенно, в ходе формального образования [6, 14]. Так, в лонгитюдном исследовании показано существенное сокращение межиндивидуальных различий в точности символической репрезентации количества под влиянием начального обучения в школе с 1 к 4 классу [14]. При этом диапазон вариативности показателя точности оценки несимволически выраженных количеств существенно не изменился на четвертом году школьного обучения в сравнении с первым годом.

При изучении возрастных особенностей точности несимволической репрезентации делаются выводы о постепенном улучшении показателей на всем протяжении школьного обучения, дальнейшем

некотором снижении темпа прироста с достижением максимума около 30 лет и последующей стабилизации показателей точности [13]. В исследовании с участием российских младших школьников сообщается о нелинейном характере изменений точности несимволической репрезентации количества с замедлением к концу начального школьного обучения [26].

Напротив, улучшение точности символической репрезентации количества совершается скачкообразно с наибольшей интенсивностью в младшем школьном возрасте, когда происходит активное формирование математических знаний, умений и навыков [8, 19]. Сообщается, в частности, что дети, обучающиеся в третьих классах, в два раза точнее определяют позицию числа на линии в тесте «Числовая линия», чем дети из детского сада [5]. В исследованиях, где сравнивается темп изменений символической и несимволической репрезентации количества в ходе начального школьного обучения, делается вывод, что точность оценки символически выраженных количеств увеличивалась с большей интенсивностью, чем точность оценки количеств в несимволической форме (например, [14]).

Одним из механизмов изменения точности репрезентации количества является «следование» линейному или логарифмическому паттерну или модели развития [1]. В частности, логарифмическая модель предполагает неравномерное распределение ошибок при ответах, а линейная модель характеризуется более точным представлением о количественной информации [22]. При этом точность и символической, и несимволической репрезентации подчинена одним и тем же принципам – расстояния между количествами (сложнее сравнить количества в 9 и 8 объектов, чем в 5 и 1) и размера (сложнее сравнить большие множества объектов, чем небольшие, даже при одинаковом расстоянии между ними). Согласно исследованиям, точность оценки количеств, выраженных в символической и несимволической форме, может разли-

чатся у одного ученика, что приводит к различиям во взаимосвязях с успешностью в математике [2].

Соотношение точности несимволической и символической оценки количеств обсуждается в контексте возрастных особенностей, когда по мере школьного обучения математике у ребенка постепенно формируется понимание тождества количества и его символического эквивалента [10]. Так, по мере знакомства детей с более широким диапазоном чисел, их представление о позиции числа на числовой линии трансформируется от логарифмического к линейному, в результате чего от года к году школьного обучения улучшается точность выполнения заданий теста «Числовая линия» и, соответственно, изменяется взаимосвязь с точностью оценки количеств, выраженных объектами [24, 25].

Существенная часть исследований точности репрезентации количества сфокусирована на изучении прогностической силы в математической успешности [9, 17, 21, 28]. В большинстве работ, в том числе с участием российских школьников, показано, что точность репрезентации количества является надежным прогностическим показателем математических успехов и достижений на всем протяжении школьного возраста [4, 12, 17, 28]. При этом среди различных аспектов репрезентации количества способность к точному определению позиции числа на числовой линии лучше предсказывает академическую успешность в математике, что подтверждается в работах с участием респондентов из разных социокультурных сообществ [3, 20, 30]. Вместе с тем в ряде исследований, в частности, с применением перекрестно-лонгитюдного анализа данных, показано, что именно успешность в математике, основанная на оценке учителя, предсказывает точность символической репрезентации количества, а не наоборот [2].

Эти различия в результатах могут быть связаны со спецификой показателя, на основе которого делается заключение об

успешности в математике, – учительской оценки, стандартизированных тестовых заданий с ограничением во времени и без ограничений, государственных экзаменов и проверочных работ. Так, показано, что годовая оценка по математике в 9 классе оказывается взаимосвязанной с Основным государственным экзаменом на уровне 0,56 при $p < 0,01$ [4]. В этой же работе сообщается, что результаты школьников по двум математическим тестам – с ограничением во времени и без ограничений – связаны лишь умеренно ($r = 0,39$; $p < 0,01$). При этом самым субъективным показателем успешности в математике называется школьная оценка [4]. Эти данные подтверждают необходимость изучения связи точности репрезентации количества с успешностью в математике на основе нескольких показателей.

Целью настоящего исследования является анализ соотношения показателей точности репрезентации количества – символической и несимволической – на разных этапах школьного обучения. В исследовании изучается проблема взаимосвязи точности репрезентации количества с успешностью выполнения государственных экзаменов и тестовых заданий по математике с различными временными условиями. Исследование выполняется с участием школьников, обучающихся в 4, 9 и 11 классах, которые являются последним годом обучения на начальном, основном и полном уровнях общего образования. Именно на этих годах школьного обучения проводится проверка усвоенных школьниками знаний с помощью стандартизированных заданий по математике, включая и государственную итоговую аттестацию.

Методика

Выборка

В исследовании приняли участие 493 школьника 4, 9 и 11 классов одной общеобразовательной организации в возрасте от 10,2 до 18,2 лет, из них 204 ученика 4 клас-

сов (47,4% девочек, средний возраст 10,8 лет, стандартное отклонение 0,4), 188 учеников 9 классов (44,3% девушек, средний возраст 15,7 лет, стандартное отклонение 0,4) и 101 ученик 11 классов (42,9% девушек, средний возраст 17,8 лет, стандартное отклонение 0,4).

Все участники исследования в конце учебного года выполнили компьютеризированные тесты, направленные на определение точности символической и несимволической репрезентации количества, а также успешности в выполнении математических заданий с ограничением и без ограничения во времени. Выполнение тестов проводилось в компьютерном классе общеобразовательной организации под постоянным наблюдением научного сотрудника исследовательской группы и при участии учителя информатики и информационно-коммуникационных технологий (ИКТ).

С согласия участников исследования и их родителей зафиксированы индивидуальные результаты выполнения Всероссийской проверочной работы по математике (для учеников 4 классов), Основного государственного экзамена по математике (для учеников 9 классов) и Единого государственного экзамена по математике (для учеников 11 классов).

Подписанные информированные согласия родителей всех школьников на участие их детей были получены перед началом сбора данных. Сбор данных осуществлялся в строгом соответствии с протоколом исследования. Анализ проводился на основе обезличенных персональных данных.

Методы

Репрезентация количества

Тест «Числовая линия», точность оценки символически выраженных количеств

Компьютеризированный тест направлен на определение точности оценки символической репрезентации количества. На экране компьютера представлена линия с числом «0» на левом конце и «1000» – на правом [3, 4]. В верхней части экрана,

над числовой линией, появляется определенное число, местоположение которого нужно указать с помощью компьютерной мыши.

Участник исследования должен указать позицию определенного числа на числовой линии, наведя курсор компьютерной мышью, и нажать левую клавишу мыши для записи выбранной позиции. В этом тесте требуется отметить позицию на числовой линии для 22 чисел, которые предъявляются в строго определенной последовательности: 246, 179, 818, 78, 722, 150, 366, 122, 738, 5, 147, 938, 18, 606, 2, 34, 754, 100, 56, 163, 486 и 725. Перед началом выполнения теста участник должен был выполнить 1 тренировочное задание.

В тесте фиксируется отклонение отмеченной участником исследования позиции каждого числа на линии от реальной позиции этого числа. В статистическом анализе используется среднее значение отклонения для всех предъявляемых 22 чисел. Следовательно, лучшим результатом по этому тесту считается меньшее значение.

Тест «Чувство числа», точность оценки несимволически выраженных количеств

Компьютеризированный тест направлен на определение точности оценки несимволической репрезентации количества [3, 4]. На экране компьютера представлен массив из синих и желтых точек, которые различаются по размеру и располагаются в произвольном порядке. Число точек каждого цвета варьирует от 5 до 21. Массив появляется на экране на 400 мс.

Участник исследования должен решить, каких точек больше – синих или желтых содержит каждый массив, и нажать на клавиатуре компьютера клавишу «С» (если больше синих точек) или «Ж» (если больше желтых точек). Время ответа ограничено восемью секундами, после которых предъявляется следующее задание. В этом тесте нужно выполнить 150 заданий с двумя перерывами. Порядок предъявления массивов является одинаковым для всех участников исследования. Перед началом

выполнения теста участник исследования должен был выполнить тренировочные задания.

В тесте фиксируется факт правильного или неправильного выполнения каждого задания. В статистическом анализе используется общее количество правильно выполненных заданий.

Государственные экзамены по математике

Основной государственный экзамен

Основной государственный экзамен по математике является формой Государственной итоговой аттестации и направлен на оценку уровня освоения учениками основного курса математики в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом. Основной государственный экзамен выполняется по завершении основного общего образования по единому протоколу и заданиям, разработанным на федеральном уровне. Оценка результатов выпускников 9 классов проводится компьютеризированным способом и двумя экспертами по утвержденным единым алгоритмам и критериям.

Основной государственный экзамен состоит из 26 заданий, сгруппированных в две части – базового уровня сложности (20 заданий), требующие краткого ответа, и повышенного уровня сложности (6 заданий) с необходимостью дать развернутый ответ. И в первой, и во второй части содержатся задания по алгебре и геометрии (Модули «Алгебра» и «Геометрия»). Задания представляют собой текстовые задачи, действия с дробями и степенями, уравнения и системы уравнений, неравенства и системы неравенств, вычисления по формуле, вопросы по числовым последовательностям и т.д.

Задания первой части всегда оцениваются в 1 балл, второй, с повышенной сложностью, – в 2 балла. Максимальное количество баллов за Основной государственный экзамен составляет 32. Время выполнения экзамена ограничено 3 часами 55 минутами. При этом ученик может самостоятель-

но выбирать время выполнения каждого задания.

Единый государственный экзамен

Единый государственный экзамен по математике является формой Государственной итоговой аттестации и направлен на оценку уровня освоения полного курса школьной математики в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом. Единый государственный экзамен выполняется по завершении среднего общего образования и предполагает два уровня – базовый и профильный.

Базовый экзамен служит для проверки понимания, усвоения и возможности применения основных математических понятий для решения задач повседневной жизни. Единый государственный экзамен по математике базового уровня состоит из 20 заданий по алгебре и началам анализа, а также по геометрии. Каждое правильно выполненное задание оценивается в 1 балл. Максимально возможное количество баллов, таким образом, равно 20.

Профильный экзамен предназначен для оценки знаний, умений и навыков, связанных с более широким спектром математических понятий, необходимых для дальнейшего математического, инженерного и естественно-научного образования. Профильный экзамен состоит из двух частей – задания базового уровня сложности с краткими ответами в виде целого числа и конечной десятичной дроби (8 заданий) и повышенного, высокого и очень высокого уровня сложности, для которых необходимо дать развернутое обоснование действий (11 заданий). Первая часть представлена уравнениями, неравенствами, действиями с геометрическими фигурами, координатами и векторами, математическими задачами из практики реальной жизни. Вторая часть профильного экзамена по математике требует углубленных знаний и включает в себя вычисления и преобразование выражений, текстовые задачи на производительность, проценты или поиск оптималь-

ного решения, действия с функциями, построение и исследование математических моделей. Правильно выполненные задания первой части оцениваются в 1 балл, а задания второй части могут быть оценены экспертами в 1, 2, 3 и 4 балла в строгом соответствии с утвержденными на федеральном уровне алгоритмами и критериями. Первичные баллы переводятся в баллы от 0 до 100.

Время выполнения Единого государственного экзамена базового уровня составляет 3 часа, а профильного – 3 часа 55 минут. При этом выпускник вправе самостоятельно определять время выполнения каждого конкретного задания.

Всероссийская проверочная работа по математике

Всероссийская проверочная работа по математике направлена на оценку уровня освоения начального курса математики школьниками 4 классов общеобразовательных организаций в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом. Всероссийская проверочная работа выполняется в конце четвертого учебного года на втором и третьем уроках по единому протоколу, единым заданиям в нескольких вариантах, разработанных и утвержденных на федеральном уровне. Оценивание работ школьников осуществляется по универсальным критериям анонимно независимыми экспертами – педагогами других школ.

Всероссийская проверочная работа состоит из 11 заданий, при этом, однако, 3 задания имеют по 2 вопроса, каждый из которых оценивается. Задания представляют собой арифметические примеры, задачи, геометрические задания, логические вопросы, в том числе повышенной сложности. Оценка этих работ происходит дифференцированно – менее сложные оцениваются в 1 балл, более сложные – в 2 балла согласно утвержденной на федеральном уровне системе оценивания проверочной работы. Максимальное количество баллов за Всероссийскую проверочную работу

составляет 18. Время выполнения всей работы ограничено 1 часом 20 минутами без фиксации времени на каждое конкретное задание.

Стандартизированные математические задания

Тест «Понимание чисел», успешность в выполнении математических заданий без ограничения во времени

Компьютеризированный тест направлен на определение успешности освоения математических знаний, умений и навыков, не требующих временных ограничений [3, 4]. Математические задания этого теста соответствуют трем уровням сложности, каждый из которых включает в себя шесть заданий, представленных в виде математических примеров, логических задач и уравнений. Задания не предполагают скоростных решений.

На экране компьютера предъявляется задание, дается инструкция и предлагается ввести ответ. В этом тесте последовательность предъявления заданий выстраивается с учетом математической успешности каждого участника исследования. Первое задание теста (средний уровень сложности) является одинаковым для всех участников исследования, а далее тест «подстраивается» под правильные или неправильные ответы конкретного участника. В ситуации, если ученик правильно решает первое задание и другие задания этого уровня сложности, ему предъявляются задания следующего уровня, а ответы на задания предыдущего уровня засчитываются как верно решенные. В ситуации, если ученик неправильно решает первое задание среднего уровня сложности, ему будут предъявляться менее сложные задания предыдущего уровня. Выполнение теста автоматически завершается, когда два задания одинаковой сложности участник исследования решил неправильно.

В статистическом анализе используется показатель общего количества правильно выполненных и/или засчитанных в качестве правильных заданий.

Тест «Верно или неверно?», успешность в выполнении математических заданий с ограничением во времени

Компьютеризированный тест направлен на определение успешности освоения математических знаний, умений и навыков в условиях строгих временных ограничений [4, 29]. Тест состоит из 48 арифметических заданий с числами и дробями, которые предъявляются в одинаковой последовательности всем участникам исследования.

На экране компьютера в верхней части представлено уже решенное математическое задание, а ниже даны ключи для оценки правильности решения: «Верно = «А», «Неверно = «О» и «Не знаю = «Л». Участникам исследования необходимо за 10 секунд решить, правильно или неправильно решено задание, и нажать соответствующую клавишу на клавиатуре – «А», «О» или «Л». Индикатор времени в виде красно-зеленой полосы находится в ле-

вой верхней части экрана, чтобы показать участнику оставшееся на решение время. Если участник не нажал клавишу в течение 10 секунд, автоматически предъявляется следующее задание.

В статистическом анализе используется показатель количества правильных ответов.

Результаты и обсуждение

В исследовании анализировались показатели точности символической и несимволической репрезентации количества, а также индивидуальные достижения школьников в выполнении стандартизированных математических заданий, в том числе в формате государственных экзаменов и проверок.

В таблице 1 представлены средние значения и стандартные отклонения (в скобках) анализируемых показателей у школьников 4, 9 и 11 классов.

Таблица 1

Описательные статистики показателей репрезентации количества и успешности в математике

Показатель	4 класс	9 класс	11 класс
Точность символической репрезентации количества	99,34 (13,14)	104,12 (14,19)	114,58 (11,13)
Точность несимволической репрезентации количества	83,95 (62,49)	54,25 (40,51)	30,00 (11,47)
Всероссийская проверочная работа по математике	11,42 (2,83)	–	–
Основной государственный экзамен по математике	–	18,46 (4,01)	–
Единый государственный экзамен по математике: базовый / профильный уровень	–	–	16,96 (2,60) / 52,09 (21,11)
Математические задания без ограничения во времени	–	10,3 (3,41)	11,79 (3,82)
Математические задания с ограничением во времени	–	35,10 (7,23)	39,21 (5,81)

В таблице 1 для показателя точности символической репрезентации количества приведено среднее значение отклонения отмеченной позиции числа на числовой линии от действительной позиции в тесте «Числовая линия». В этом тесте меньшие значения связываются с более высокими индивидуальными достижениями в оценке символически выраженных количеств.

Для показателей точности несимволической репрезентации количества, успешности решения математических заданий с

ограничением во времени и без него представлено общее количество правильных ответов в тестах «Чувство числа», «Верно или неверно?» и «Понимание чисел» соответственно. При этом минимально и максимально возможное значение составляет от 0 до 150, от 0 до 48 и от 0 до 18 соответственно.

Успешность в выполнении государственных экзаменов и проверочной работы по математике выражена в баллах. Минимальное и максимальное значение

баллов составляет: для Всероссийской проверочной работы – от 0 до 18, Основного государственного экзамена – от 0 до 32, Единого государственного экзамена базового уровня – от 0 до 20, а Единого государственного экзамена профильного уровня – от 0 до 100.

Согласно данным, представленным в таблице 1, средние значения показателей несимволической и символической репрезентации количества улучшаются в ходе школьного обучения. Так, средний балл правильных ответов по тесту «Чувство числа» в 4 классах составляет 99,34 при возможных 150, а в 11 классах достигает значения в 114,58. Показатели точности оценки символически выраженных количеств также улучшаются в ходе школьного обучения – с 83,95 в 4 классах до 30,00 в 11 классах. Согласно описательным статистикам в 4, 9 и 11 классах, среди показателей точности репрезентации количества показатель оценки символически выраженных количеств наиболее интенсивно изменяется в ходе школьного обучения.

Эти полученные в исследовании данные соответствуют результатам кроссекционных и лонгитюдных исследований с участием российских школьников, в которых сообщается о более интенсивном росте показателей оценки количеств, выраженных в символической форме и связанных с понятием числа [4, 14, 27]. В частности, в лонгитюдном исследовании выявлен факт уменьшения разрыва между показателями учеников по результатам теста «Числовая линия» в ходе начального школьного обучения и отмечается компенсаторный паттерн изменения точности оценки символически выраженных количеств. Иными словами, школьники с более высокой точностью в первом классе продемонстрировали более медленный рост на протяжении начального обучения, и, напротив, их сверстники с низкой точностью оценки в первом классе более существенно улучшили свой результат к 4-му классу [14]. Кроме того, в ряде работ зафиксировано улучше-

ние средней точности символической репрезентации количества на протяжении основного и полного уровней общего образования, которое происходит, в том числе, за счет «перехода» от логарифмической модели репрезентации к более точной линейной модели и дальнейшего изменения параметров этой модели [1, 8, 19].

Вместе с тем для показателя точности репрезентации количества, связанного с несимволическим форматом, диапазон вариативности к 4-му году школьного обучения остался неизменным с первого класса. Действительно, в исследованиях сообщается о более последовательном росте точности несимволической репрезентации количества с максимальным «раскрытием» в возрасте 30 лет и дальнейшей стабилизацией [13]. Эти различия могут быть связаны со спецификой влияния процесса обучения математике в школе на показатели точности оценки количеств, выраженных в символической и несимволической форме.

Согласно данным таблицы 1, средние значения показателя успешности решения математических заданий возрастают независимо от условий выполнения – с ограничением во времени и без ограничений. Эти результаты соответствуют данным исследований, где сообщается о возрастании показателей по тесту «Верно или неверно?» на протяжении последних трех лет общего образования, с 9 по 11 класс и делается вывод об аккумулятивном эффекте процесса школьного обучения математике [29]. Сходные данные получены и для показателя успешности в выполнении математических заданий без ограничения во времени [4].

Связь символической и несимволической репрезентации количества на разных этапах школьного обучения

Для понимания специфики взаимосвязи между показателями точности оценки символической и несимволической репрезентации количества применялся корреляционный анализ. В ходе корреляционного анализа рассчитывались коэффициенты корреляции Спирмена между показате-

лями по тесту «Числовая линия», определяющему точность оценки символически выраженных количеств, и тесту «Чувство числа», направленному на измерение точности оценки несимволически выраженных количеств.

Согласно результатам корреляционного анализа, на начальном этапе школьного обучения показатели символической и несимволической репрезентации количества взаимосвязаны слабо ($r = -0,246$; $p < 0,01$). Учитывая тот факт, что меньшее значение отклонения указанной позиции числа от действительной позиции числа на линии в тесте «Числовая линия» соответствует лучшему индивидуальному результату, взаимосвязь является прямо пропорциональной. В частности, более высокая точность оценки символически выраженных количеств младшими школьниками приводит к более высоким показателям в оценке несимволически выраженных количеств. При этом обратное направление связи также может быть достоверным. Наряду с этим коэффициенты корреляции свидетельствуют о слабой взаимосвязи между двумя показателями точности репрезентации количества на четвертом году школьного обучения.

На основном уровне общего образования взаимосвязь символической и несимволической репрезентации количества достигает высоких значений ($r = -0,813$; $p < 0,01$). Связь является прямо пропорциональной и предполагает сильную взаимозависимость двух показателей репрезентации количеств, выраженных в символической и несимволической форме. Подобная тенденция к высокой взаимосвязи наблюдается и на полном уровне общего образования: коэффициент корреляции достигает высоких значений в $-0,801$ при $p < 0,01$.

Следовательно, результаты взаимосвязи показателей точности символической и несимволической репрезентации количества подтверждают своеобразие взаимозависимости в процессе школьного обучения. Так, на начальном уровне общего образования, когда ученик начинает осваивать арифме-

тические операции и приобретать опыт взаимодействия с числами, точность оценки количеств, выраженных в символической форме, слабо связана с точностью оценки несимволически выраженных количеств. В частности, с большей вероятностью младший школьник может хорошо справляться с тестовыми заданиями на оперирование объектами (каких точек больше – синих или желтых), но при этом показывать низкую точность при определении позиции конкретного числа на числовой линии. Напротив, на этапе завершения основного или полного уровня общего образования школьник с высокой вероятностью одинаково хорошо (или плохо) может оценивать и сравнивать количества, выраженные как в виде объектов, так и в виде чисел.

Эти результаты могут быть объяснены, в том числе, спецификой развития точности оценки символически и несимволически выраженных количеств в ходе школьного обучения. Показано, в частности, более интенсивное развитие способности к точной оценке количеств, выраженных в символической форме, под влиянием процесса обучения математике, которая достигает более высоких значений именно в старших классах по сравнению с начальной школой [1]. Сообщается об эффектах обучения математике на изменения в репрезентации числа на числовой линии и постепенной «смене», начиная с 7-го года школьного обучения, логарифмической модели на более точную линейную модель оценки символически выраженных количеств. При этом увеличение точности репрезентации количества на полном уровне школьного обучения может происходить за счет возрастания коэффициента регрессии линейной модели, показывающего соответствие между указанной и действительной позицией числа на линии, а также за счет уменьшения константы, свидетельствующей о точности отметки близких к 0 чисел.

Вместе с тем исследования показывают менее значимую зависимость точности

оценки количеств, выраженных в несимволической форме, от обучения, в частности, в начальной школе [14, 23, 26]. Так, диапазон вариативности способности к оценке объектов практически не меняется от первого к четвертому году школьного обучения в отличие от способности точно определять позицию числа на числовой линии. Эти особенности траекторий развития в ходе школьного обучения могут влиять на изменения взаимосвязей между символической и несимволической репрезентацией количества на разных этапах школьного обучения.

Точность репрезентации количества и успешность в математике

Проблема взаимосвязи точности репрезентации количества с успешностью в математике изучалась в группах школьников, обучающихся в 4, 9 и 11 классах. Эти классы являются последним годом обучения на начальном, основном и полном уровнях общего образования. Именно на этих годах школьного обучения проводится проверка усвоенных школьниками знаний на основе стандартизированных заданий по различным дисциплинам, включая и государственную итоговую аттестацию. При этом развитие точности репрезентации количества происходит неравномерно в период с 4 по 11 класс и характеризуется своеобразием траекторий изменения способности к оперированию символически и несимволически выраженными количествами [1].

Эти данные обуславливают необходимость анализа соотношения точности репрезентации количества и показателей математической успешности, основанной на результатах государственных экзаменов (9- и 11-й классы), проверочной работе (4-й класс) и компьютеризированных заданиях, предполагающих и не предполагающих жестких временных ограничений (9- и 11-й классы).

Для понимания специфики связи символической и несимволической репрезентации количества с успешностью в математике на разных этапах школьного обучения применялся корреляционный анализ.

Начальный уровень общего образования

В таблице 2 представлены коэффициенты Спирмена между точностью репрезентации количества и успешностью в математике, основанной на результатах выполнения Всероссийской проверочной работы, на выборке школьников четвертых классов (** $p < 0,01$).

Таблица 2

Взаимосвязь показателей точности репрезентации количества с успешностью в математике у школьников начального уровня обучения

Показатели	Всероссийская проверочная работа
Точность символической репрезентации количества	-0,274**
Точность несимволической репрезентации количества	0,288**

Указанная в таблице 2 точность символической и несимволической репрезентации количества оценивалась с помощью тестов «Числовая линия» и «Чувство числа» соответственно. Согласно данным, на начальном уровне общего образования оба показателя репрезентации количества в практически одинаковой степени прямо пропорционально взаимосвязаны с баллом Всероссийской проверочной работы по математике. Следовательно, более высокая точность оперирования символически и несимволически выраженными количествами способствует более успешному выполнению стандартизированных математических заданий в формате проверочной работы.

Эти результаты соответствуют данным перекрестно-лонгитюдного анализа с участием российских младших школьников, где сообщается об умеренной прямо пропорциональной связи тестовых показателей способности к оперированию несимволически и символически выраженными количествами с учительской оценкой по математике [2]. Значение точности несимволической репрезентации количества показано в исследованиях с участием де-

тей дошкольного и младшего школьного возраста, которые выполняли задания с множествами объектов, и индивидуальные различия в этих заданиях были связаны с успеваемостью по математике двумя месяцами ранее при контроле общих когнитивных способностей [11]. При этом также подчеркивается важность точности символической репрезентации, измеренной тестом «Числовая линия», в школьной успеваемости по математике, в том числе в младшем школьном возрасте [3, 5, 9].

Наряду с этим, согласно настоящему исследованию, связь оказывается слабой, что свидетельствует о низкой взаимо-

зависимости между точностью оценки количественной информации и математическими знаниями, умениями и навыками.

Основной уровень общего образования

В таблице 3 представлены коэффициенты Спирмена между точностью репрезентации количества и успешностью в математике, основанной на результатах выполнения Основного государственного экзамена и компьютеризированных математических заданий с ограничением времени и без него на выборке школьников 9-х классов (* $p < 0,05$; ** $p < 0,01$).

Таблица 3

Взаимосвязь показателей точности репрезентации количества с успешностью в математике у школьников основного уровня обучения

Показатели	Основной государственный экзамен	Математические задания без ограничения во времени	Математические задания с ограничением во времени
Точность символической репрезентации количества	-0,145*	-0,219*	-0,250*
Точность несимволической репрезентации количества	0,437**	0,405**	0,424**

Согласно данным таблицы 3, на основном уровне общего образования точность репрезентации количества оказывается прямо пропорционально связанной со всеми анализируемыми показателями успешности в математике – государственным экзаменом, а также компьютеризированными математическими заданиями.

При этом, в отличие от начального уровня школьного обучения, у учеников средней школы наблюдаются различия для символической и несимволической репрезентации количества по силе связи с математической успешностью. Так, с баллом Основного государственного экзамена по математике наиболее тесно коррелирует способность к точной оценке несимволически выраженных количеств по сравнению с символическими количествами ($r=0,437$ при $p < 0,01$ против $r = -0,145$ при $p < 0,05$). Следовательно, точность несимволической репрезентации количества практически в 3

раза сильнее связана с экзаменом по математике.

Сходные результаты корреляционного анализа получены и для успешности решения математических заданий, независимо от временных условий выполнения. В частности, показано, что более сильной является взаимозависимость способности оперировать несимволически выраженными количествами и успешности решать математические задания как в условиях строгих временных ограничений, так и без них. Напротив, точность символической репрезентации количества оказывается слабо, но статистически значимо взаимосвязанной с успешностью решения математических заданий с различными временными условиями ($r = -0,219$ и $r = -0,250$; $p < 0,05$).

Поэтому на выборке учеников средней школы вне зависимости от временных условий тестов «Верно или неверно?» и «Понимание чисел» математическая успешность тес-

нее связана с точностью несимволической репрезентации количества. Эти данные свидетельствуют о важности и значении умения оперировать количествами, выраженными в несимволической форме, с помощью объектов, пространств и длин. В исследованиях сообщается, что индивидуальные различия по несимволической оценке количеств, измеренные в 14 лет, были связаны с математической успешностью, измеренной на тех же детях ретроспективно вплоть до дошкольного возраста [13]. Более того, отмечается, что связь между успешностью в математике и

точностью несимволической оценки в процессе обучения является стабильной [13, 17].

Полный уровень общего образования

В таблице 4 представлены коэффициенты Спирмена между точностью репрезентации количества и успешностью в математике, основанной на результатах выполнения Единого государственного экзамена базового и профильного уровня, а также компьютеризированных математических заданий с ограничением времени и без него на выборке школьников 11-х классов (* $p < 0,05$; ** $p < 0,01$).

Таблица 4

Взаимосвязь показателей точности репрезентации количества с успешностью в математике у школьников полного уровня обучения

Показатели	Единый государственный экзамен		Математические задания без ограничения во времени	Математические задания с ограничением во времени
	профильный уровень	базовый уровень		
Точность символической репрезентации количества	-0,501**	-0,567**	-0,891**	-0,410**
Точность несимволической репрезентации количества	0,214*	0,049	0,319*	0,096

Согласно данным таблицы 4, на полном уровне общего образования среди двух показателей точности репрезентации количества в наибольшей мере связанной с успешностью в математике оказывается способность к оперированию символически выраженными количествами ($0,501 < |r| < 0,891$; $p < 0,01$). Так, точность определения позиции числа на линии, измеренная тестом «Числовая линия», прямо пропорционально связана с баллом государственного экзамена по математике базового и профильного уровня, а также с успешностью решения математических заданий с ограничением во времени и без ограничения.

Второй показатель точности репрезентации количества – оценка несимволически выраженных количеств – оказывается в меньшей степени связанным с успешностью старшеклассников в математике. В частности, точность несимволической репрезентации слабо взаимосвязана лишь

с профильным Единым государственным экзаменом и математическими заданиями без ограничения во времени.

При этом на выборке учеников старших классов наблюдаются различия во взаимосвязях каждого из анализируемых показателей точности репрезентации количества с математическими заданиями с ограничением и без ограничения во времени. Так, способность к оценке и символически, и несимволически выраженных количеств в большей мере связана с успешностью в решении математических заданий без временных ограничений ($r = -0,891$; $p < 0,01$ и $r = 0,319$; $p < 0,05$ соответственно). Более того, точность несимволической репрезентации оказалась статистически не связанной с успешностью в выполнении заданий на скорость и базовым выпускным экзаменом по математике ($p > 0,05$).

Результаты настоящей работы в полной мере соответствуют данным исследований о наиболее сильных корреляционных свя-

зях с успешностью в обучении математике способности к точной оценке количеств, выраженных в символической форме по сравнению с несимволически выраженными множествами [2, 9]. Следует отметить, что в кросскультурных исследованиях с участием российских и британских школьников показана равнозначная роль чувства числа, связанного с оценкой количеств в символической и несимволической форме, в успешности решения тестовых заданий по математике (например, [3]). Однако это расхождение в результатах может быть связано с типом математических тестов и возрастной спецификой выборки. Вместе с тем в большинстве исследований подтверждается высокая прогностическая способность точности символической репрезентации количества для индивидуальных различий в математической успешности [9, 21, 24, 25].

Следует отметить, что различия в результатах относительно силы взаимосвязи каждого из показателей точности репрезентации количества в математической успешности, полученных в группах школьников основного и полного уровней общего образования, могут быть связаны со спецификой выборки 11-х классов. Так, для продолжения школьного обучения в старших классах выпускники 9-х классов проходят отбор, прежде всего, по успеваемости. Этот факт может влиять на результаты взаимосвязи между точностью репрезентации количества и успешностью в математике. Более того, в исследованиях поднимается вопрос о направлении причинно-следственных связей между способностью к оперированию множествами и математической успешностью [2].

В целом, анализ взаимосвязей между точностью репрезентации количества и успешностью в математике показал специфику соотношения на каждом из уровней школьного обучения. Так, в начальных классах оба показателя репрезентации количества – символической и несимволической – равнозначно слабо связаны с

Всероссийской проверочной работой по математике. На основном уровне школьного обучения точность несимволической репрезентации количества теснее взаимосвязана с Основным государственным экзаменом и успешностью выполнения математических заданий вне зависимости от временных условий. В старших классах, напротив, точность символической репрезентации количества становится более взаимосвязанной со всеми показателями математической успешности – базовым и профильным Единым государственным экзаменом, а также математическими заданиями с ограничением во времени и без него. При этом именно на выборке старшеклассников выявлена разница во взаимосвязях символической репрезентации для тестовых заданий по математике – она в 2 раза превышает коэффициент корреляции между способностью оценивать символически выраженные количества и математическим заданием без ограничений во времени по сравнению с заданием на скорость.

Заключение

В представленном исследовании проводился анализ взаимосвязей между показателями точности символической и несимволической репрезентации количества на разных этапах школьного возраста, а также изучалась их связь с успешностью в математике. В фокусе внимания оказались результаты государственных экзаменов по математике – Основного государственного экзамена в 9-м классе и Единого государственного экзамена базового и профильного уровня в 11-м классе, Всероссийской проверочной работы по математике в 4-м классе, а также успешность в решении компьютеризированных математических заданий с ограничением во времени и без ограничения.

В проведенной работе показана специфика соотношения точности символической и несимволической репрезентации количества на разных этапах школьного

обучения. В частности, на уровне начального школьного обучения между точностью оценки количеств, выраженных в символической и несимволической форме, выявлена слабая прямо пропорциональная взаимосвязь. На основном и полном уровнях общего образования теснота взаимосвязи между двумя показателями точности репрезентации количества существенно усиливается и достигает высоких значений коэффициентов корреляции. Этот результат объясняется спецификой траекторий развития точности оценки символически и несимволически выраженных количеств в ходе общего образования, которая заключается, в том числе, в различной степени подверженности влиянию обучения математике.

В исследовании также проанализирована проблема соотношения индивидуальных особенностей репрезентации количества с успешностью в математике. Сделан вывод о зависимости связи точности символической и несимволической репрезентации количества с успешностью выполнения государственных экзаменов от уровня школьного обучения и, соответственно, вида экзаменационной и проверочной работы.

Показано, что на уровне начального школьного обучения точность символической и несимволической репрезентации количества слабо связана с успешностью выполнения Всероссийской проверочной работы по математике. При этом оба показателя репрезентации количества оказываются практически в равной мере связанными с успешностью выполнения математических заданий.

На основном уровне общего образования каждый из показателей репрезентации количества – символической и несимволической – в различной мере связан с успешностью выполнения Основного государственного экзамена по математике. В частности, точность оценки несимволически выраженных количеств существенно сильнее (практически в 3 раза) связана с баллом

государственного экзамена по сравнению с показателем оценки символически выраженных количеств.

Различия в связи между точностью репрезентации указанных количеств и результатом государственного экзамена по математике наблюдаются и на полном уровне общего образования. Но при этом более тесная связь с баллом Единого государственного экзамена обнаружена для точности оценки символически выраженных количеств. Эта тенденция характерна как для профильного выпускного экзамена по математике, так и для базового экзамена. Эти результаты объяснены не только различиями в содержании Единого и Основного государственных экзаменов по математике, но также и спецификой выборки старшеклассников, прошедшими отбор для обучения в 10–11-х классах школы, в том числе по успеваемости по математике.

Выявлено к тому же, что специфика выборки школьников 11-го класса может опосредовать связь точности репрезентации количества и типа задания по математике – с ограничением во времени или без него. Так, в 9-х классах, где обучаются все ученики, поступившие в школу без отбора, точность оценки количеств, выраженных в несимволической форме, теснее связана с успешностью выполнения стандартизированных математических заданий по сравнению с точностью оценки символически выраженных количеств. При этом не обнаружено различий для двух показателей репрезентации в контексте силы связи с заданиями с временным ограничением и без ограничения. Подобная тенденция к усилению роли несимволической репрезентации количества была зафиксирована у школьников 9-х классов для успешного выполнения Основного государственного экзамена по математике.

Напротив, у школьников 11-х классов точность оценки символически выраженных количеств оказывается в большей мере связанной с успешностью выполнения стандартизированных математиче-

ских заданий разных «временных» типов, чем точность несимволической репрезентации. При этом наиболее тесная связь с обоими показателями точности репрезентации количества наблюдается именно для математических заданий без ограничения во времени. Эти различия могут быть связаны также со своеобразием когнитивных ресурсов, необходимых для успешности в выполнении заданий различных типов.

Перспективы исследования связаны с анализом причинно-следственных отношений между показателями точности репрезентации и математическими достижениями на протяжении школьного обучения при контроле когнитивных функций. Продемонстрировано, в частности, что влияние точности символической репрезентации количества на несимволическую репрезентацию в ходе начального обучения в школе может быть объяснено интеллектом, но не наоборот [27]. Более того, взаимосвязи символической и несимволической репрезентации количества с математическими достижениями должны быть проанализированы в контексте возможного влияния скорости переработки информации и зрительно-пространственной рабочей памяти. Установлено, например, что в ходе начального обучения общие когнитивные функции полностью объяснили рост точности несимволической репрезентации количества, но не символической репрезентации [14].

Литература

1. Кузьмина Ю.В., Воронин И.А., Тихомирова Т.Н., Малых С.Б. Возрастные изменения точности репрезентации числа на числовой линии // Теоретическая и экспериментальная психология. – 2020. – Т. 13. – № 4. – С. 18–30.
2. Тихомирова Т.Н., Малых С.Б. Чувство числа и успешность в обучении математике в младшем школьном возрасте: перекрестно-лонгитюдный анализ // Психологический журнал. – 2018. – Т. 39. – № 6. – С. 47–58.
3. Тихомирова Т.Н., Малых С.Б., Тосто М.Г., & Ковас Ю.В. Когнитивные характеристики и успешность в решении математических заданий в старшем школьном возрасте: кросс-культурный анализ // Психологический журнал. – 2014. – Т. 35. – № 1. – С. 41–53.
4. Тихомирова Т.Н., Малых С.Б. Когнитивные основы индивидуальных различий в успешности обучения. – М.; СПб.: Нестор-История, 2017. – 312 с.
5. Booth J.L., Siegler R.S. Developmental and individual differences in pure numerical estimation // *Developmental Psychology*. – 2006. – Vol. 42. – No. 1. – P. 189–201.
6. De Smedt B., Noël M.P., Gilmore C., & Ansari D. How do symbolic and non-symbolic numerical magnitude processing skills relate to individual differences in children's mathematical skills? A review of evidence from brain and behavior // *Trends in Neuroscience and Education*. – 2013. – Vol. 2. – No. 2. – P. 48–55.
7. Dehaene S. The number sense: How the mind creates mathematics. – USA, NY: Oxford University Press, 2011. – 267 p.
8. Ebersbach M., Luwel K., Frick A., Onghena P., & Verschaffel L. The relationship between the shape of the mental number line and familiarity with numbers in 5-to 9-year old children: Evidence for a segmented linear model // *Journal of Experimental Child Psychology*. – 2008. – Vol. 99. – No. 1. – P. 1–17.
9. Geary D.C. Cognitive predictors of achievement growth in mathematics: a 5-year longitudinal study // *Developmental Psychology*. – 2011. – Vol. 47. – No. 6. – P. 1539–1552.
10. Gebuis T., Van Der Smagt M.J. False approximations of the approximate number system? // *PloS one*. – 2011. – Vol. 6. – No. 10. – e25405. doi: 10.1371/journal.pone.0025405.
11. Gilmore C.K., McCarthy S.E., Spelke E.S. Non-symbolic arithmetic abilities and mathematics achievement in the first year of formal schooling // *Cognition*. – 2010. – Vol. 115. – No. 3. – P. 394–406.
12. Halberda J., Mazocco M.M.M., Feigenson L. Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement // *Nature*. – 2008. – Vol. 455. – No. 7213. – P. 665–668.
13. Halberda J., Ly R., Wilmer J., Naiman D. & Germine L. Number sense across the lifespan

- as revealed by a massive internet-based sample // *Proceedings of the National Academy of Sciences of USA*. – 2012. – Vol. 109. – No. 28. – P. 11116–11120.
14. *Kuzmina Y., Tikhomirova T., Lysenkova I., & Malykh S.* Domain-general cognitive functions fully explained growth in nonsymbolic magnitude representation but not in symbolic representation in elementary school children // *PloS one*. – 2020. – Vol. 15. – No. 2. – e0228960. doi: 10.1371/journal.pone.0228960.
 15. *Libertus M.E., Brannon E.M.* Stable individual differences in number discrimination in infancy // *Developmental Science*. – 2010. – Vol. 13. – No. 6. – P. 900–906.
 16. *Merritt D.J., DeWind N.K., Brannon E.M.* Comparative cognition of number representation / T.R. Zentall, E.A. Wasserman (Eds.). *The Oxford Handbook of Comparative Cognition*. – New York, NY: Oxford University Press, 2012. – P. 451–476.
 17. *Nys J., Content A.* Judgement of discrete and continuous quantity in adults: Number counts! // *Quarterly Journal of Experimental Psychology*. – 2012. – Vol. 65. – No. 4. – P. 675–690.
 18. *Opfer J.E., Siegler R.S.* Development of quantitative thinking / In K.J. Holyoak & R.G. Morrison (Eds.). *The Oxford handbook of thinking and reasoning*. – USA, NY: Oxford University Press. – P. 585–605.
 19. *Opfer J.E., Siegler R.S.* Representational change and children's numerical estimation // *Cognitive Psychology*. – 2007. – Vol. 55. – No. 3. – P. 169–195.
 20. *Rodic M., Zhou X., Tikhomirova T., Wei W., Malykh S., Ismatulina V., Sabirova E., Davidova Y., Tosto M., Lemelin J-P., Kovas Y.* Cross-cultural investigation into cognitive underpinnings of individual differences in early arithmetic // *Developmental Science*. – 2015. – Vol. 18. – No. 1. – P. 165–174.
 21. *Sasanguie D., Van den Bussche E., Reynvoet B.* Predictors for mathematics achievement? Evidence from a longitudinal study // *Mind, Brain, and Education*. – 2012. – Vol. 6. – No. 3. – P. 119–128.
 22. *Siegler R.S.* Magnitude knowledge: The common core of numerical development // *Developmental Science*. – 2016. – Vol. 19. – No. 3. – P. 341–361.
 23. *Siegler R.S., Ramani G.B.* Playing linear number board games – but not circular ones – improves low-income preschoolers' numerical understanding // *Journal of Educational Psychology*. – 2009. – Vol. 101. – No. 3. – P. 545–560.
 24. *Slusser E.B., Santiago R.T., Barth H.C.* Developmental change in numerical estimation // *Journal of Experimental Psychology: General*. – 2013. – Vol. 142. – No. 1. – P. 193–208.
 25. *Slusser E., Barth H.* Intuitive proportion judgment in number-line estimation: Converging evidence from multiple tasks // *Journal of Experimental Child Psychology*. – 2017. – Vol. 162. – P. 181–198.
 26. *Tikhomirova T., Kuzmina Y., Lysenkova I., & Malykh S.* Development of approximate number sense across the elementary school years: A cross-cultural longitudinal study // *Developmental Science*. – 2019. – Vol. 22. – No. 4. – e12823. doi: 10.1111/desc.12823.
 27. *Tikhomirova T., Kuzmina Y., Lysenkova I., & Malykh S.* The relationship between non-symbolic and symbolic numerosity representations in elementary school: The role of intelligence // *Frontiers in Psychology*. – 2019. – Vol. 10. – Art. 2724. doi: 10.3389/fpsyg.2019.02724.
 28. *Tikhomirova T., Malykh A., Malykh S.* Predicting academic achievement with cognitive abilities: Cross-sectional study across school education // *Behavioral Sciences*. – 2020. – Vol. 10. – No. 10. – Art. 158. doi: 10.3390/bs10100158.
 29. *Tikhomirova T.N., Misozhnikova E.B., Malykh A.S., Gaydamashko I.V., Malykh S.B.* Mathematical fluency in high school students // *Psychology in Russia*. – 2017. – Vol. 10. – No. 1. – Art. 193. doi: 10.11621/pir.2017.0107.
 30. *Tosto M.G., Garon-Carrier G., Gross S., Petrill S.A., Malykh S., Malki K., Hart S.A., Thompson L., Karadaghi R.L., Yakovlev N., Tikhomirova T., Opfer J.E., Mazzocco M.M.M., Dionne G., Brendgen M., Vitaro F., Tremblay R.E., Boivin M., Kovas Y.* The nature of the association between number line and mathematical performance: An international twin study // *British Journal of Educational Psychology*. – 2019. – Vol. 89. – No. 4. – P. 787–803.
 31. *Wang J.J., Odic D., Halberda J., & Feigenson L.* Changing the precision of preschoolers' approximate number system representations changes their symbolic math performance // *Journal of Experimental Child Psychology*. – 2016. – Vol. 147. – P. 82–99.

References

1. Kuz'mina YuV, Voronin IA, Tikhomirova TN, Malykh SB. Vozrastnyye izmeneniya tochnosti reprezentatsii chisla na chislovoy linii. *Teoreticheskaya i eksperimental'naya psikhologiya* 2020; 13(4):18–30 (in Russian).
2. Tikhomirova TN, Malykh SB. Chuvstvo chisla i uspehnost' v obuchenii matematike v mladshem shkol'nom vozraste: perekrestno-longitudnyy analiz. *Psikhologicheskiy zhurnal* 2018; 39(6):47–58 (in Russian).
3. Tikhomirova TN, Malykh SB, Tosto MG, & Kovas YuV. Kognitivnyye kharakteristiki i uspehnost' v reshenii matematicheskikh zadaniy v starshem shkol'nom vozraste: krosskul'turnyy analiz. *Psikhologicheskiy zhurnal* 2014; 35(1):41–53 (in Russian).
4. Tikhomirova TN, Malykh SB. Kognitivnyye osnovy individual'nykh razlichiy v uspehnosti obucheniya. Moscow; St. Petersburg: Nestor-Istoriya, 2017: 312 (in Russian).
5. Booth JL, Siegler RS. Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology* 2006; 42(1):189–201.
6. De Smedt B, Noël MP, Gilmore C, & Ansari D. How do symbolic and non-symbolic numerical magnitude processing skills relate to individual differences in children's mathematical skills? A review of evidence from brain and behavior. *Trends in Neuroscience and Education* 2013; 2(2):48–55.
7. Dehaene S. *The number sense: How the mind creates mathematics*. USA, NY: Oxford University Press, 2011: 267.
8. Ebersbach M, Luwel K, Frick A, Onghena P, & Verschaffel L. The relationship between the shape of the mental number line and familiarity with numbers in 5-to 9-year old children: Evidence for a segmented linear model. *Journal of Experimental Child Psychology* 2008; 99(1):1–17.
9. Geary DC. Cognitive predictors of achievement growth in mathematics: a 5-year longitudinal study. *Developmental Psychology* 2011; 47(6):1539–1552.
10. Gebuis T, Van Der Smagt MJ. False approximations of the approximate number system?. *PloS one* 2011; 6(10): e25405. doi: 10.1371/journal.pone.0025405.
11. Gilmore C.K., McCarthy S.E., Spelke E.S. Non-symbolic arithmetic abilities and mathematics achievement in the first year of formal schooling. *Cognition* 2010; 115(3):394–406.
12. Halberda J, Mazocco MMM, Feigenson L. Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature* 2008; 455(7213):665–668.
13. Halberda J, Ly R, Wilmer J, Naiman D & Germine L. Number sense across the lifespan as revealed by a massive internet-based sample. *Proceedings of the National Academy of Sciences of USA* 2012; 109(28):11116–11120.
14. Kuzmina Y, Tikhomirova T, Lysenkova I, & Malykh S. Domain-general cognitive functions fully explained growth in nonsymbolic magnitude representation but not in symbolic representation in elementary school children. *PloS one* 2020; 15(2): e0228960. doi: 10.1371/journal.pone.0228960.
15. Libertus ME, Brannon EM. Stable individual differences in number discrimination in infancy. *Developmental Science* 2010; 13(6):900–906.
16. Merritt DJ, DeWind NK, Brannon EM. Comparative cognition of number representation. TR Zentall, EA Wasserman (Eds). *The Oxford Handbook of Comparative Cognition*. New York, NY: Oxford University Press, 2012:451–476.
17. Nys J, Content A. Judgement of discrete and continuous quantity in adults: Number counts!. *Quarterly Journal of Experimental Psychology* 2012; 65(4):675–690.
18. Opfer JE, Siegler RS. Development of quantitative thinking. In KJ Holyoak & RG Morrison (Eds). *The Oxford handbook of thinking and reasoning*. USA, NY: Oxford University Press: 585–605.
19. Opfer JE, Siegler RS. Representational change and children's numerical estimation. *Cognitive Psychology* 2007; 55(3):169–195.
20. Rodic M, Zhou X, Tikhomirova T, Wei W, Malykh S, Ismatulina V, Sabirova E, Davidova Y, Tosto M, Lemelin J-P, Kovas Y. Cross-cultural investigation into cognitive underpinnings of individual differences in early arithmetic. *Developmental Science* 2015; 18(1):165–174.
21. Sasanguie D, Van den Bussche E, Reynvoet B. Predictors for mathematics achievement? Evidence from a longitudinal study. *Mind, Brain, and Education* 2012; 6(3):119–128.
22. Siegler RS. Magnitude knowledge: The common core of numerical development. *Developmental Science* 2016; 19(3):341–361.

23. Siegler RS, Ramani GB. Playing linear number board games – but not circular ones – improves low-income preschoolers’ numerical understanding. *Journal of Educational Psychology* 2009; 101(3):545–560.
24. Slusser EB, Santiago RT, Barth HC. Developmental change in numerical estimation. *Journal of Experimental Psychology: General* 2013; 142(1):193–208.
25. Slusser E, Barth H. Intuitive proportion judgment in number-line estimation: Converging evidence from multiple tasks. *Journal of Experimental Child Psychology* 2017; 162:181–198.
26. Tikhomirova T, Kuzmina Y, Lysenkova I, & Malykh S. Development of approximate number sense across the elementary school years: A cross-cultural longitudinal study. *Developmental Science* 2019; 22(4): e12823. doi: 10.1111/desc.12823.
27. Tikhomirova T, Kuzmina Y, Lysenkova I, & Malykh S. The relationship between non-symbolic and symbolic numerosity representations in elementary school: The role of intelligence. *Frontiers in Psychology* 2019; 10: 2724. doi: 10.3389/fpsyg.2019.02724.
28. Tikhomirova T, Malykh A, Malykh S. Predicting academic achievement with cognitive abilities: Cross-sectional study across school education. *Behavioral Sciences* 2020; 10(10): 158. doi: 10.3390/bs10100158.
29. Tikhomirova TN, Misozhnikova EB, Malykh AS, Gaydamashko IV, Malykh SB. Mathematical fluency in high school students. *Psychology in Russia* 2017; 10(1): 193. doi: 10.11621/pir.2017.0107.
30. Tosto MG, Garon-Carrier G, Gross S, Petrill SA, Malykh S, Malki K, Hart SA, Thompson L, Karadaghi RL, Yakovlev N, Tikhomirova T, Opfer JE, Mazzocco MMM, Dionne G, Brendgen M, Vitaro F, Tremblay RE, Boivin M, Kovas Y. The nature of the association between number line and mathematical performance: An international twin study. *British Journal of Educational Psychology* 2019; 89(4):787–803.
31. Wang JJ, Odic D, Halberda J, & Feigenson L. Changing the precision of preschoolers’ approximate number system representations changes their symbolic math performance. *Journal of Experimental Child Psychology* 2016; 147:82–99.

SYMBOLIC AND NON-SYMBOLIC REPRESENTATION OF QUANTITY: SPECIFIC RATIO AND RELATIONSHIP WITH SUCCESS IN MATH

T.N. TIKHOMIROVA, S.B. MALYKH

Psychological Institute of the Russian Academy of Education, Moscow

The results of the study of the relationship between the accuracy of the estimation of quantities, expressed in symbolic and non-symbolic form, with the success of completing tasks in mathematics, including in the format of state exams, at different stages of schooling, are presented. A study with the participation of 493 schoolchildren in grades 4, 9 and 11 shows the specificity of the ratio of the accuracy of symbolic and non-symbolic representation of quantity at the primary, basic and complete levels of general education. A conclusion is made about the dependence of the relationship between the accuracy of symbolic and non-symbolic representation of quantity and the success of state examinations on the level of school education and, accordingly, the type of examination or test work.

Keywords: symbolic representation of a number, non-symbolic representation of a number, standardized math tasks, state exam, test work, primary, basic and complete levels of schooling.

Address:

Tikhomirova T.N.
 Doctor of Psychology, Corresponding Member RAE,
 Psychological Institute RAE
 E-mail: tikho@mail.ru